

المنطق 3

تمرين

باستعمال الرموز المنطقية أكتب النصوص التالية:

1. لكل عدد طبيعي n يوجد عدد طبيعي k

بحيث: $n = 2k$ أو $n = 2k + 1$

2. لكل عدد حقيقي x يوجد عدد نسبي p بحيث

$p \leq x < p + 1$:

3. دالة مكبورة f

4. دالة مصغورة f

5. دالة تقبل قيمة قصوى مطلقة في x_0

6. دالة تقبل قيمة دنيا مطلقة في x_0

تمرين

أعط نفى العبارات التالية:

1. $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : (x + y)^2 \neq x^2 + y^2$

2. $(\forall x \in \mathbb{R}^+) x \geq x$

3. $(\forall x \in \mathbb{R}) \exists a \in \mathbb{R} x^2 + ax + a^2 = 0$

4. $(\forall x \in \mathbb{R}) x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq x$

5. $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}^*) x \leq y \Rightarrow \frac{x}{y} \leq 1$

6. $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$

تمرين

ليكن x و y من \mathbb{R} بين أن:

1. $x \neq 1$ و $y \neq 1 \Rightarrow x + y - xy \neq 1$

2. $x \neq y \Rightarrow (x - 1)(y + 1) \neq (x + 1)(y - 1)$

تمرين

نعتبر العبارة: $P: (\exists x \in \mathbb{R}) x > 1 \Rightarrow 1 + x^2 > 2$

1. حدد نفى العبارة

2. هل P صحيحة أم خاطئة؟ علل جوابك

تمرين

1. بين أن:

$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : a \neq b = 0 \Rightarrow a = b = 0$

2. استنتج حلول المعادلة: $\sin x + \cos y = 2$

تمرين

x و y عنصران من \mathbb{R}^+ نضع $a = x + y$ بين أن:

$\sqrt{4x + 1} + \sqrt{4y + 1} \leq 2(a + 1)$

تمرين

n عدد طبيعي بين أن:

$$\sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}}} \notin \mathbb{N}$$

x و y عدنان حقيقيان بين أن:

$$2\sqrt{x+2} + \sqrt{y-6} = \frac{x+y+1}{2} \Rightarrow x=2 \text{ و } y=7$$

تمرين

♣ بين أن $(\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow p$ استلزام صحيح

♣ x و y عدنان حقيقيان بين أن:

$$|\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}| \leq |x - y|$$

♣ بين بالخلف أن الدالة $f(x) = x + \frac{1}{x^2 + 1}$ غير مكبورة

♣ ليكن x عنصر من \mathbb{R} بين أن:

$$x^3 + x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

♣ ليكن x و y من \mathbb{R} وبحيث $|x| \leq \frac{1}{2}$ و $|y| \leq 1$

بين أن $|4x^2y - y - x| \leq \frac{17}{16}$

تمرين

بين أن

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

بين بالترجع أن $n > 1$: $(1 + \frac{1}{n})^n < 2$

17 يقسم $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$

ليكن α حلا للمعادلة $x + \frac{1}{x} = 3$ و $\alpha > 1$ بين أن

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = 3 \left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \right) - \left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \right)$$

استنتج أن $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{N}$

تمرين

نضع $E = \mathbb{R} - \{-1\}$

بين أن لكل عددين x و y من E لدينا:

$$(xy + x + y) \in E$$

a و b عدنان حقيقيان نعتبر العبارة:

$$P: [(\forall x \in \mathbb{R}) : a \leq x \Rightarrow b < x] \Rightarrow b \leq a$$

أ. أعط الاستلزام المضاد للعكس

ب. بين أن P عبارة صحيحة